Modelos cualitativos de órdenes de magnitud: Introducción a los modelos mixtos

Núria Agell

ESADE-URL & LEA-SICA
Av. Pedralbes, 62, 08034 BARCELONA
agell@esade.es

Mónica Sánchez, Francesc Prats

MA2-UPC & LEA-SICA
Pau Gargallo 5, 08028 Barcelona
{prats, monicas}@ma2.upc.es

Resumen

En el artículo que se presenta se introduce un modelo mixto de órdenes de magnitud para el tratamiento de problemas en los que se dispone al mismo tiempo de datos reales cuantitativos, de datos cualitativos expresados en un álgebra de órdenes de magnitud, y de información sobre ciertas comparaciones entre ellos. Como continuación de trabajos anteriores se generalizan las definiciones de ciertas relaciones de comparabilidad entre números reales al caso de tener indistintamente números reales y etiquetas cualitativas en el marco de un álgebra cualitativa de órdenes de magnitud. Por último se presenta la aplicación OM-LAB, que permite generar espacios cualitativos de órdenes de magnitud variable y definir en ellos funciones y operadores cualitativos.

1 Introducción

Uno de los problemas más importantes que se han venido planteando en el razonamiento cualitativo ha sido el cálculo con variables cualitativas. En este artículo se define un modelo mixto de órdenes de magnitud que constituye un marco de referencia adecuado para poder representar problemas reales en los que las variables pueden tomar tanto valores cuantitativos como cualitativos.

Dentro del ámbito del razonamiento cualitativo con órdenes de magnitud, hasta el momento, se han utilizado dos tipos de modelos que permiten trabajar con información cualitativa, éstos son los llamados modelos de órdenes de magnitud absolutos y los de órdenes de magnitud modelos relativos [Missier et al 89; Travé-Massuyès et al 97; Raiman 86; Mavrovouniotis y Stephanopoulos 88: Dague 93a y b]. En este artículo se unifican criterios dados desde ambos modelos para definir un modelo mixto de órdenes de magnitud. En él se dispone de una referencia absoluta para etiquetar las magnitudes, así como de un conjunto de relaciones binarias (despreciabilidad, proximidad y comparabilidad) en concordancia con el lenguaje propio de dichas etiquetas.

En este trabajo, se consideran las relaciones binarias entre valores cuantitativos definidas en [Sánchez *et al.* 96] y se generalizan de manera natural a los casos de dos valores cualitativos y de un valor cualitativo y uno cuantitativo. Las relaciones de despreciabilidad y de proximidad entre valores cuantitativos [Sánchez *et al.* 96] se definían a partir de cocientes entre los valores frontera que delimitan los intervalos correspondientes a distintas magnitudes cualitativas del modelo considerado, y son invariantes por homotecias; a su vez la relación de comparabilidad se definía a partir de las propias etiquetas cualitativas del modelo.

Los resultados que se presentan permiten la aproximación a problemas reales con datos cualitativos y cuantitativos, es decir problemas en los que no se dispone de suficiente información cuantitativa como para establecer un tratamiento numérico de los mismos, pero se conocen operadores y relaciones binarias definidas entre magnitudes que permiten obtener resultados menos precisos pero más realistas que los que se obtendrían forzando una resolución numérica. En concreto, se utiliza el modelo mixto para la resolución de sistemas de restricciones cualitativas y semicualitativas dadas por ecuaciones lineales y relaciones binarias. En este trabajo se presenta también la aplicación OM-LAB [Agell 98], creada sobre MATLAB (versión 5.1), que permite trabajar en espacios de órdenes de magnitud mixtos.

2 Marco del trabajo: el modelo absoluto de los órdenes de magnitud

En esta sección se describe el modelo de órdenes de magnitud absolutos en que se enmarca este trabajo [Travé-Massuyès y Piera 89] y se recuerdan las definiciones de “tener el mismo orden de magnitud”, la “despreciabilidad” y la “proximidad” entre números reales dadas en [Sánchez *et al.* 96].

El Modelo Absoluto Completo de Órdenes de Magnitud [Travé-Massuyès y Piera 89; Piera y Travé 89; Missier et al 89] se construye a partir de una partición de la recta real en 7 clases como la de la figura 1. Cada una de estas siete clases recibe el nombre de etiqueta básica o descripción básica y corresponde a una de las etiquetas: Negativo Grande (NL), Negativo Mediano (NM), Negativo Pequeño (NS), Cero (0), Positivo Pequeño (PS), Positivo Mediano (PM), y Positivo Grande (PL), siendo S el conjunto formado por estas etiquetas: $S=\{NL, NM, NS, 0, PS, PM, PL\}$.

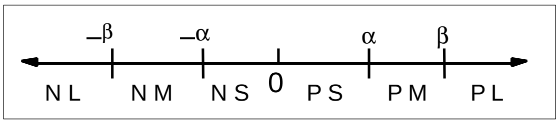

Fig. 1

Dado un número real $r \in R$, $[r]$ denotará la etiqueta de r en S, es decir, el elemento del conjunto S que contiene al número real r.

Dados dos elementos x, y en $S\text{-}\{0\}$, se define la etiqueta $[x, y]$ como el menor intervalo de la recta real que contiene a x e y. Por ejemplo, dados NM, PS de S, la etiqueta [NM,PS] es el intervalo real de extremos $-\beta$ y α.

El Universo Completo de Descripción basado en S, que es el Espacio de Cantidades que se utiliza en este trabajo, es el conjunto S*:

$$S^* = S \cup \{ [x,y] \mid x,y \in S\text{-}\{0\},\ x<y \}.$$

En S* se considera la relación de orden $\leq$ dada por la inclusión de conjuntos:

$$A,B \in S^*,\quad A\leq B \quad \text{si} \quad A \subset B$$

Esta relación es la dual de la relación de precisión, en el sentido de que se verifica $A\leq B$ si y sólo si A y B son dos descripciones cualitativas de un mismo número real y A es más precisa que B.

En la figura 2 se representa gráficamente esta relación de orden:

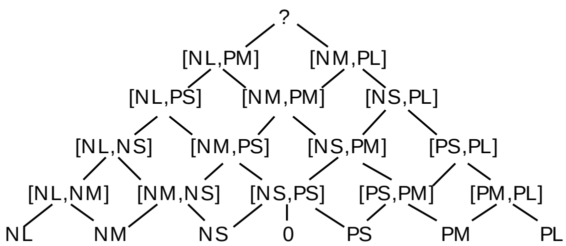

Fig. 2: La relación $\leq$ en S*

Para todo $X \in S^*\text{-}\{0\}$, se llama base de X al conjunto $B_X = \{B\in S\text{-}\{0\}: B \leq X\}$, y para todo $X \in S^*$, $B^*_X = \{B\in S: B \leq X\}$ es la base ampliada de X.

En S* se define la Igualdad Cualitativa de la siguiente manera:

$$A \approx B \text{ si existe } X \in S^* \text{ tal que } X\leq A \text{ y } X\leq B,$$

que formaliza la “posibilidad de ser iguales”.

El concepto de operador binario consistente con un operador real es el siguiente: una operación binaria Δ en S* es consistente con una operación binaria de la recta real $*$ si para cualesquiera $A,B \in S^*$, $A \;\Delta\; B$ es el mínimo elemento de S* (como siempre respecto de la inclusión) que contiene el interior de $A*B = \{ a*b \mid a\in A,\ b\in B\}$.

Consideramos las dos operaciones $\oplus$ (Suma Cualitativa o Q-suma) y $\otimes$ (Producto Cualitativo o Q-producto) como las operaciones binarias de S* que son consistentes con la suma real y con el producto real respectivamente.

La cuaterna $(S^*, \approx, \oplus, \otimes)$ recibe el nombre de Álgebra Cualitativa de los Órdenes de Magnitud.

En [Sanchez *et al*. 96] se definieron tres relaciones binarias: "tener el mismo orden de magnitud", la "despreciabilidad" y la "proximidad" entre números reales, inspiradas en cierta manera en las relaciones binarias introducidas en [Raiman 91], y perfeccionadas posteriormente en [Mavrovouniotis y Stephanopoulos 88] y [Dague 93a y b], pero de forma que se utilizan las etiquetas de dichos números en el conjunto S y dan lugar a una coherencia entre el modelo relativo que definen y el modelo absoluto en el que están definidas:

Definiciones

1. Sean x e y dos números reales, x e *y tienen el mismo orden de magnitud*, x OM y, .si sus valores absolutos $|x|$ e $|y|$ tienen la misma etiqueta en S, es decir: $[|x|]=[|y|]$.

2. Dados dos números reales x e y, *x es despreciable con respecto a y*, x Ne y, si $x=y=0$ o $y\neq 0$ y existe un número real k tal que:

$$[k] = PL \quad y \quad \left[\frac{kx}{y}\right] \leq [NS\ ,\ PS]$$

3. Dados dos números reales x e y, *x es próximo a y*, x Vo y, cuando tienen el mismo orden de magnitud y su diferencia es despreciable con respecto al máximo de sus valores absolutos:

$$x \text{ Vo } y \Leftrightarrow x \text{ OM } y \wedge (x - y) \text{ Ne } \max\{|x|\ ,\ |y|\}$$

Dos cantidades son del mismo orden de magnitud cuando, independientemente de su signo, expresan el mismo tamaño, es decir son simultáneamente pequeños, medianos o grandes.

Con respecto a la relación de despreciabilidad, cuando y no es nulo, x es despreciable con respecto a y si el cociente kx/y es pequeño para algún número $k>\beta$. En efecto, teniendo en cuenta la relación de orden considerada en S*, se tiene que las únicas etiquetas [r] de S que cumplen $[r] \leq [NS\ ,\ PS]$ son NS, 0 y PS. Así, el que x sea despreciable con respecto a y significa que x es "bastante pequeño" con respecto a y, pues aunque x haya sido "aumentado", al ser multiplicado por un número grande, su cociente por y continúa siendo pequeño. Además, la condición para que un número real x sea despreciable con respecto a otro $y\neq 0$ es equivalente a que $|x/y| < \alpha/\beta$. Por lo tanto, una condición necesaria para que x Ne y es que sus valores absolutos satisfagan la desigualdad $|x|< |y|$, ya que $\alpha/\beta < 1$, para cualquier par de valores asignados a las fronteras α y β.

La condición para que dos números reales sean próximos es que la diferencia entre su cociente y 1 sea suficientemente pequeña. Nótese que si dos números son próximos, necesariamente, tienen el mismo signo: en efecto, si x e y son de distinto signo, entonces $|x - y| = |x| + |y| \geq \max(|x|\ ,\ |y|)$, por tanto es imposible que $(x - y)$ Ne $\max(|x|\ ,\ |y|)$, y así no (x Vo y).

Un sistema de reglas de inferencia basadas en estas tres relaciones entre números reales puede encontrarse en [Sanchez *et al*. 96].

3 Las relaciones Ne y Q-Ne entre números y etiquetas cualitativas

Las relaciones que serán introducidas a continuación aparecen en la siguiente tabla:

	$y\in\Re$	$E_2\in S$
$x\in\Re$		x Ne E_2 x Q-Ne E_2
$E_1\in S$	E_1 Ne y E_1 Q-Ne y	E_1 Ne E_2 E_1 Q-Ne E_2

En primer lugar, dado un número real x y una etiqueta cualitativa E, pueden compararse a través de dos relaciones de despreciabilidad en los dos sentidos:

Definición 1. x *es despreciable con respecto a* E, **x Ne E**, si x Ne y, $\forall y$ tal que $y\in E$.

A partir de esta definición se tienen las siguientes caracterizaciones:

Proposición 1

1. Si [0] o NS o PS$\leq$ E: x Ne E $\Leftrightarrow$ x = 0
2. Si [0], NS, PS no$\leq$ E, y E$\geq$NM o PM: x Ne E $\Leftrightarrow |x| \leq\alpha^2/\beta$
3. Si E=NL o E=PL: x Ne E $\Leftrightarrow |x| \leq\alpha$

Demostración:

1. Si [0] $\leq$ E, entonces: x Ne E $\Rightarrow$ x Ne 0 $\Rightarrow$ x = 0

   Si NS $\leq$ E o PS $\leq$ E, entonces es trivial que x Ne E $\Leftrightarrow$ x Ne PS; por tanto x Ne E $\Leftrightarrow$ $|x/y| < \alpha/\beta\ \forall y\in (0, \alpha) \Leftrightarrow |x| < \alpha y/\beta\ \ \forall y\in (0, \alpha) \Leftrightarrow x=0$.
2. Si [0], NS, PS no$\leq$ E, y E$\geq$NM o PM, entonces es trivial que x Ne E $\Leftrightarrow$ x Ne PM; por tanto, x Ne E $\Leftrightarrow$ $|x/y| < \alpha/\beta\ \forall y\in (\alpha,\beta) \Leftrightarrow |x| < \alpha y/\beta\ \ \forall y\in (\alpha,\beta) \Leftrightarrow |x| \leq\alpha^2/\beta$.

   La última equivalencia se demuestra de la siguiente manera:

   $\Leftarrow$) trivial, ya que $\alpha<y$.

   $\Rightarrow$) tomando $y_n = \alpha+ 1/n$, entonces $|x| < \alpha (\alpha+ 1/n) /\beta\ \forall n$; tomando límites para $n \rightarrow +\infty$ se obtiene: $|x| \leq\alpha^2/\beta$.
3. Si E=NL o E=PL, entonces es trivial que x Ne E $\Leftrightarrow$ x Ne PL; por tanto x Ne E $\Leftrightarrow$ $|x/y| < \alpha/\beta\ \forall y>\beta \Leftrightarrow |x| < \alpha y/\beta\ \ \forall y>\beta \Leftrightarrow |x| \leq\alpha$

   La demostración de la última equivalencia es análoga a la anterior.

Definición 2. E *es despreciable con respecto a* x, **E Ne x**, si y Ne x, $\forall y$ tal que $y\in E$

Dada una etiqueta cualitativa de S*, el conjunto de números reales respecto al cual es despreciable aparece caracterizado a continuación:

Proposición 2

1. Si NL o PL$\leq$ E: no existen x tales que E Ne x
2. Si NL, PL no$\leq$ E, y E $\geq$NM o PM: E Ne x $\Leftrightarrow |x| \geq \beta^2/\alpha$
3. Si NL, PL, NM, PM no$\leq$ E, y E $\geq$NS o PS: E Ne x $\Leftrightarrow |x| \geq \beta$
4. Si E=[0] E Ne x $\forall x$

Demostración:

1. Si NL o PL$\leq$ E, entonces es trivial que E Ne x $\Leftrightarrow$ PL Ne x, y por tanto E Ne x $\Leftrightarrow$ $|y/x| < \alpha/\beta\ \forall y>\beta \Leftrightarrow |x| > y\beta/\alpha\ \forall y>\beta$: tal x no existe.
2. Si NL, PL no$\leq$ E, y E $\geq$NM o PM, entonces E Ne x $\Leftrightarrow$ PM Ne x, y por tanto E Ne x $\Leftrightarrow$ $|y/x| < \alpha/\beta\ \forall y\in (\alpha,\beta) \Leftrightarrow |x| > y\beta/\alpha\ \forall y\in (\alpha,\beta) \Leftrightarrow |x| \geq\beta^2/\alpha$.

   La última equivalencia se demuestra de la siguiente manera:

   $\Leftarrow$) trivial, ya que $y<\beta$.

   $\Rightarrow$) tenemos $|x| > \beta(\beta- 1/n)/\alpha\ \ \forall n$; tomando límites para $n \rightarrow +\infty$ se obtiene: $|x| \geq\beta^2/\alpha$.
3. Si NL, PL, NM, PM no$\leq$ E, y E $\geq$NS o PS, entonces E Ne x $\Leftrightarrow$ PS Ne x, y por tanto E Ne x $\Leftrightarrow$ $|y/x| < \alpha/\beta\ \forall y\in (0,\alpha) \Leftrightarrow |x| > y\beta/\alpha\ \forall y\in (0,\alpha) \Leftrightarrow |x| \geq\beta$.

   La demostración de la última equivalencia es análoga a la anterior.
4. [0] Ne x $\Leftrightarrow$ 0 Ne x, que se satisface para todo $x\in R$.

En segundo lugar, dado un número real x y una αcualitativa E, las relaciones de Q-despreciabilidad expresan la posibilidad de que uno sea despreciable con respecto al otro:

Definición 3. x *es Q-despreciable respecto a* E, **x Q-Ne E**, si $\exists y \in E$ tal que x Ne y

Las siguientes propiedades caracterizan esta relación:

Proposición 3

1. Si E = [0]: x Q-Ne E $\Leftrightarrow$ x = 0
2. Si NS o PS$\leq$ E y NL,PL,NM,PM no$\leq$ E: x Q-Ne E $\Leftrightarrow |x| < \alpha^2/\beta$
3. Si NL, PL no$\leq$ E, y E $\geq$NM o PM: x Q-Ne E $\Leftrightarrow |x| < \alpha$
4. Si NL o PL $\leq$ E: x Q-Ne E $\forall x$

Demostración:

1. x Q-Ne [0] $\Leftrightarrow$ x Ne 0 $\Leftrightarrow$ x = 0
2. Si NS o PS$\leq$ E y NL,PL,NM,PM no$\leq$ E, entonces es trivial que x Q-Ne E $\Leftrightarrow$ x Q-Ne PS; por tanto: x Q-Ne E $\Leftrightarrow \exists y\in(0, \alpha)$: $|x/y| < \alpha/\beta \Leftrightarrow \exists y\in(0, \alpha)$: $|x| < \alpha y/\beta \Leftrightarrow$ $|x| < \alpha^2/\beta$

   La última equivalencia se demuestra de la forma siguiente:

   $\Leftarrow$) Basta tomar y tal que $\beta|x|/\alpha < y < \alpha$

   $\Rightarrow$) $|x| < \alpha y/\beta < \alpha^2/\beta$
3. Si NL, PL no$\leq$ E, y E $\geq$NM o PM, entonces: x Q-Ne E $\Leftrightarrow$ x Q-Ne PM; por tanto: x Q-Ne E $\Leftrightarrow \exists y\in(\alpha,\beta)$: $|x/y| < \alpha/\beta \Leftrightarrow \exists y\in(\alpha,\beta)$: $|x| < \alpha y/\beta \Leftrightarrow |x| < \alpha$

   La demostración de la última equivalencia es análoga a la anterior.
4. Si NL o PL $\leq$ E, entonces : x Q-Ne E $\Leftrightarrow$ x Q-Ne PL; por tanto: x Q-Ne E $\Leftrightarrow \exists y>\beta$: $|x/y| < \alpha/\beta$, que se satisface para todo $x\in R$.

Definición 4. E *es Q-despreciable respecto a* x, **E Q-Ne x**, si $\exists y \in E$ tal que y Ne x

Para esta relación se tiene:

Proposición 4

1. Si [0] $\leq$ E: E Q-Ne x $\forall x$
2. Si [0] no$\leq$ E, y E $\geq$NS o PS: E Q-Ne x $\forall x \neq 0$
3. Si [0], NS, PS no$\leq$ E, y E $\geq$NM o PM: E Q-Ne x $\Leftrightarrow |x| > \beta$
4. Si E=NL o E=PL: E Q-Ne x $\Leftrightarrow |x| > \beta^2/\alpha$

Demostración

1. Si [0] $\leq$ E, dado que 0 Ne x se satisface para todo $x\in R$, se tiene E Q-Ne x $\forall x\in R$
2. Si [0] no$\leq$ E, y E $\geq$NS o PS, entonces es trivial que E Q-Ne x $\Leftrightarrow$ PS Q-Ne x; por tanto:

   E Q-Ne x $\Leftrightarrow \exists y\in(0, \alpha)$: $|y/x| < \alpha/\beta$, que se satisface para todo $x\neq 0$.
3. Si [0], NS, PS no$\leq$ E, y E $\geq$NM o PM, entonces es trivial que E Q-Ne x $\Leftrightarrow$ PM Q-Ne x; por tanto:

   E Q-Ne x $\Leftrightarrow \exists y\in(\alpha, \beta)$: $|y/x| < \alpha/\beta \Leftrightarrow \exists y\in(\alpha, \beta)$: $y < |x|\, \alpha/\beta \Leftrightarrow |x| > \beta$.

   La última equivalencia se demuestra de la forma siguiente:

   $\Leftarrow$) Basta tomar y tal que $\alpha < y < \min\{\beta,|x|\alpha/\beta\}$

   $\Rightarrow$) $|x| > \beta y/\alpha > \beta$
4. Si E=NL o E=PL, entonces es trivial que E Q-Ne x $\Leftrightarrow$ PL Q-Ne x; por tanto:

   E Q-Ne x $\Leftrightarrow \exists\, y > \beta$: $|y/x| < \alpha/\beta \Leftrightarrow \exists\, y > \beta$: $y < |x|\, \alpha/\beta \Leftrightarrow |x| > \beta^2/\alpha$

   La demostración de la última equivalencia es análoga a la anterior.

Finalmente, pueden compararse dos etiquetas cualitativas a través de las dos relaciones siguientes:

Definición 5. E_1 *es despreciable con respecto a* E_2, **E_1 Ne E_2**, si x Ne y, $\forall x \in E_1$, $\forall y\in E_2$

que da lugar a las siguientes caracterizaciones:

Proposición 5

1. [0] Ne E_2, $\forall E_2 \in S$

2. Si $E_1 \neq [0]$: E_1 Ne $E_2 \Leftrightarrow E_1 \in$ {NS, PS, [NS,PS]} y $E_2 \in$ {NL,PL}

Demostración: basta considerar el caso en que E_2 es una etiqueta básica positiva, debido a que E_1 Ne $E_2 \Leftrightarrow E_1$ Ne ($-E_2$) y al hecho de que si $E_2 = B_1 \cup ... \cup B_k$, unión de elementos básicos, entonces E_1 Ne $E_2 \Leftrightarrow E_1$ Ne B_i $\forall i$

- E_1 Ne [0] $\Leftrightarrow E_1 = [0]$
- E_1 Ne PS $\Leftrightarrow E_1 = [0]$, por la proposición 1, apartado 1)
- Utilizando la proposición 1, apartado 2): E_1 Ne PM $\Leftrightarrow |x| \leq \alpha^2/\beta < \alpha$, $\forall x \in E_1 \Leftrightarrow E_1 = [0]$
- Utilizando la proposición 1, apartado 3): E_1 Ne PL $\Leftrightarrow |x| \leq \alpha$, $\forall x \in E_1 \Leftrightarrow E_1 = [0]$ o E_1 = PS o E_1 = NS o E_1 = [NS,PS]

Definición 6. E_1 *es Q-despreciable respecto a* E_2, **E_1 Q-Ne E_2**, si $\exists x \in E_1$, $\exists y \in E_2$ tal que y Ne x

En este caso se tiene:

Proposición 6

1. Si $[0] \leq E_1$: E_1 Q-Ne E_2 $\forall x$
2. Si $[0] \leq E$, y $E \geq$ NS o PS: E_1 Q-Ne E_2 $\forall E_2 \neq [0]$
3. Si [0], NS, PS $\leq E_1$: E_1 Q-Ne $E_2 \Leftrightarrow$ NL o PL $\leq E_2$

Demostración: basta considerar el caso en que E_2 es una etiqueta básica positiva, debido a que E_1 Q-Ne $E_2 \Leftrightarrow E_1$ Q-Ne ($-E_2$) y al hecho de que si $E_2 = B_1 \cup ... \cup B_k$, unión de elementos básicos, entonces E_1 Q-Ne $E_2 \Leftrightarrow \exists$ B_i tal que E_1 Q-Ne B_i

- E_1 Q-Ne [0] $\Leftrightarrow \exists x \in E_1$: x Ne 0 $\Leftrightarrow \exists x \in E_1$: x = 0 $\Leftrightarrow E_1 \geq [0]$
- E_1 Q-Ne PS $\Leftrightarrow \exists x \in E_1$: $|x| \leq \alpha^2/\beta < \alpha \Leftrightarrow E_1 \geq$ PS o NS o $E_1 = [0]$
- E_1 Q-Ne PM $\Leftrightarrow \exists x \in E_1$: $|x| < \alpha \Leftrightarrow E_1 \geq$ PS o NS o $E_1 = [0]$
- E_1 Q-Ne PL: se satisface para cualquier E_1

4 La aplicación OMLAB

En esta sección se presenta la aplicación OMLAB, creada sobre MATLAB (versión 5.1), desarrollada para trabajar en espacios de órdenes de magnitud mixtos [Agell 98].

La aplicación OMLAB permite, en primer lugar, generar espacios cualitativos de órdenes de magnitud a partir de cualquier partición finita y simétrica de la recta real; ya sea una partición en 7 clases básicas como la considerada en las secciones anteriores, definida por los dos puntos frontera positivos α y β (junto con, evidentemente, sus opuestos $-\alpha$ y $-\beta$ y el 0), o una partición de distinta granularidad, definida por un conjunto finito de puntos frontera positivos cualesquiera α_1 ,... α_n.

Además la aplicación OMLAB permite definir operadores cualitativos y relaciones binarias y resolver sistemas de ecuaciones lineales en dichos espacios. Cabe destacar que la matriz ampliada de los sistemas lineales cualitativos que permite resolver la aplicación puede contener valores reales y valores cualitativos. La aplicación tiene un cómodo interface con el usuario tal como puede verse en la figura 3.
Una vez introducida la partición de la recta real, OMLAB genera el espacio de órdenes de magnitud absolutos asociado. Para definir un sistema de ecuaciones lineales, el usuario debe introducir el número de ecuaciones y el número de incógnitas, entonces en cada una de las posiciones correspondientes a los coeficientes y a los términos independientes, se introduce el correspondiente valor cuantitativo o cualitativo (tomando los valores cualitativos en el espacio cualitativo previamente generado).

Para obtener las soluciones del sistema, el programa utiliza primero como filtro las relaciones binarias definidas en las secciones anteriores para reducir la variabilidad de las incógnitas. Una vez reducido el subconjunto de posibles soluciones, éstas se substituyen en todos los sistemas que se pueden generar con los elementos básicos pertenecientes a las bases de cada uno de los coeficientes.

El sistema se resuelve de forma secuencial, es decir, cada una de las ecuaciones actúa como filtro y en cada una de ellas se substituyen sólo los valores cualitativos que son ya solución de las anteriores.

En la figura 3 se muestra una pantalla en la que se ha generado un espacio de órdenes de magnitud con siete etiquetas básicas, a partir de los puntos frontera $\alpha = 2$ y $\beta = 5$ introducidos por el usuario, y se plantea el siguiente sistema lineal también introducido por el usuario:

$$\left.\begin{array}{c} P1*X1 + P3*X2 \approx [P1,P3] \\ 1*X1 + 1*X2 \approx P3 \end{array}\right\}$$

el programa resuelve este sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas, en el que algunos coeficientes son cualitativos y otros son cuantitativos. Las soluciones (X1,X2) son: (P2,N3), (P2,N2), (P2,N1), (P3,N3), (P3,N2), (P3,N1), (P3,[0]), (P3,P1), (P3,P2), (P3,P3).

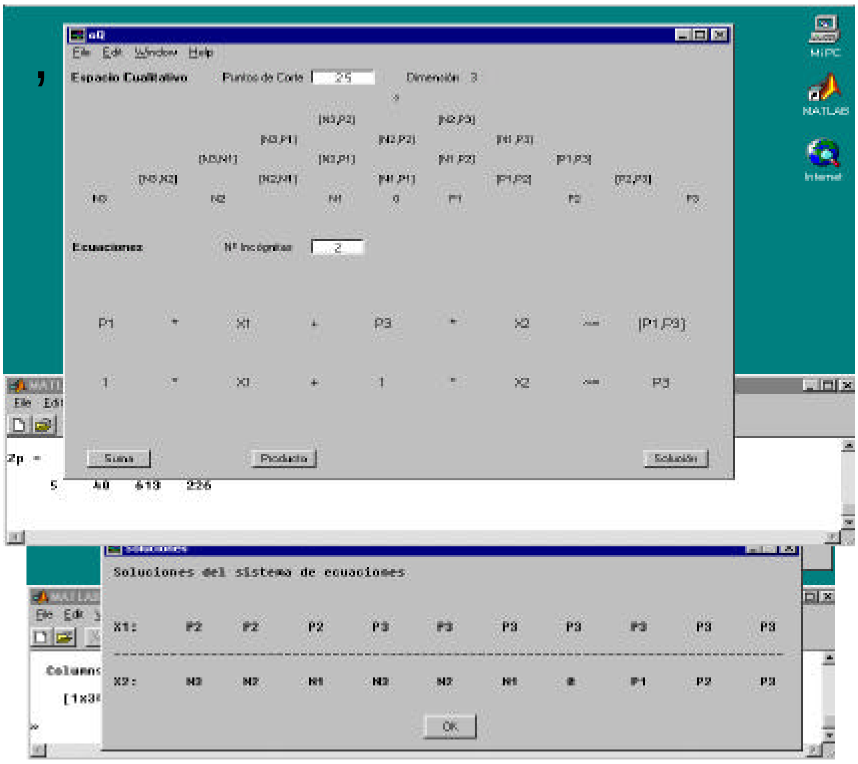

Fig. 3

Referencias

[Agell 98] Agell, N. *Estructures matemàtiques per al model qualitatiu de órdenes de magnitud absoluts*. Ph. D. Thesis Universitat Politècnica de Catalunya, 1998.

[Dague 93a],. Dague, P. Numeric Reasoning with Relative Orders ofMagnitude, *Proceedings of AAAI Conference,* Washington, July 1993.

[Dague 93b],. Dague, P. Symbolic Reasoning with Relative Orders ofMagnitude, *Proceedings of the 13th IJCAI,* Chambéry, August 1993.

[Mavrovouniotis y Stephanopoulos 88] Mavrovouniotis, M.L. & Stephanopoulos, G. Formal Order of Magnitude Reasoning. *Process Engineering, Computer Chem. Engng*. Vol 12, n. 9/10, pp. 867-880, 1988.

[Missier et al 89] Missier, A., Piera, N., Travé, L.: Orders of Magnitude Algebras: a Survey.: *Revue d'Intelligence Artificielle,* no. 4, vol. 3, (1989) pp. 95-109.

[Piera y Travé 89] Piera, N. & Travé, L.: About Qualitative Equality: Axioms and Properties, *9th International Workshop on Expert System and their Applications,* Avignon 1989.

[Raiman 86] Raiman, O. Order of Magnitude Reasoning. *Proceedings of AAAI Conference,* Philadelphia, pàg. 100-104. 1986.

[Sánchez et al. 96] Sánchez, M., Prats, F., Piera, N. Una Formalización de relaciones de comparabilidad en modelos cualitativos. *Boletín AEPIA* Vol. 6 pp. 15-22. Valencia,1996

[Travé-Massuyès y Piera 89] Travé,L & Piera,N The orders of Magnitude Models as Qualitative Algebras, *11th IJCAI*, Detroit 1989.

[Travé-Massuyès et al 97]Travé-Massuyès, L., Dague, Ph., Guerrin, F.: *Le raisonement qualitatif pour les sciences de l'ingénieur*. Ed. Hermes, Paris(1997)